Pikapaketti logiikkaan

Tämän oppimateriaalin tarkoituksena on tutustua pikaisesti matemaattiseen logiikkaan. Oppimateriaalin asioita tarvitaan projektin tekemisessä. Kiinnostuneet voivat lukea lisää myös Vapaa matikka –kirjasarjan kirjasta ”MAA11 Logiikka ja lukuteoria”. Kirja löytyy internetistä.

Lähdetäänpä tutustumaan logiikan ihmeisiin!

Mitä logiikka on?

Logiikka on matematiikan ala, joka tutkii ajattelua ja päättelyä. Tärkeimpiä logiikan tutkimusaloja on **deduktiivinen päättely**. Deduktiivisessa päättelyssä **oletuksista** päädytään **johtopäätökseen**.

ESIMERKKI 1

(1) Musti on dalmatialainen.
(2) Dalmatialaiset ovat koiria.
(3) Musti on koira.

Nyt (1) ja (2) ovat oletuksia ja (3) on johtopäätös. Päättelyketju on **loogisesti pätevä**, koska oletuksista tehty johtopäätös on tosi kaikissa tilanteissa.

Johtopäätös on tosi, jos oletusten perusteella päädytään aina aukottomasti samaan johtopäätökseen. Seuraavilla esimerkeillä on pyritty havainnollistamaan johtopäätöksen loogista pätevyyttä.

ESIMERKKI 2

Onko väittämä loogisesti pätevä?

(1) Hervanta on Tampereella.
(2) Juuso asuu Hervannassa.
(3) Juuso asuu Tampereella.

Väittämä on loogisesti pätevä.

Opetus- ja kulttuuriministeriö
LUMA-KESKUS SUOMI


ESIMERKKI 3

(1) Ruusu on kukka.
(2) Tulppaani on kukka.

---

(3) Ruusu on tulppaani.

Väittämä ei ole loogisesti pätevä. Nyt asia on helposti hahmotettavissa, sillä tiedämme, ettei ruusu ja tulppaani ole sama asia.

Logiikan kieli

Logiikan lauseita kutsutaan **propositioiksi**. Propositioilla on aina **totuusarvo** eli väittämä on aina tosi tai epätosi. Propositioita eivät siis ole esimerkiksi käsky: ”Laula!” tai kysymys: ”Minne menet?”, sillä niistä ei voi päätellä suoraan, ovatko ne tosia vai epätosia. Yksinkertaisimpia propositioita kutsutaan atomilauseiksi. Seuraavat ovat atomilauseita ja samalla propositioita:

1. Tampere on Suomessa.
2. Lontoo on Ranskassa.

Lause 1 on **tosi** ja lause 2 on **epätosi**. Propositioita merkitään yleensä isoilla kirjaimilla $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ ja niin edelleen. Totuusarvosta tosi käytetään merkintää 1 ja epätodesta merkintää 0.

Atomilauseita voidaan yhdistää niin kutsuttujen **konnektiivien** avulla. Konnektiiveja ovat **ei**, **ja**, **tai, jos…niin** sekä **jos ja vain jos**. Seuraavassa kolme esimerkkiä yhdistetyistä lauseista:

1. Tampere on Suomessa ja Helsinki on Suomessa.
2. Ei sada vettä ja ei paista aurinko.
3. Jos olen sairas, en mene kouluun.

Kullekin konnektiiville käytetään matemaattisessa logiikassa omaa merkkiä. Alla olevassa taulukossa on esitelty konnektiivien merkitykset, nimet ja merkit.

konnektiivin merkitys	konnektiivin nimi	konnektiivin merkki
ei	negaatio	$\neg$
ja	konjunktio	$\wedge$
tai	disjunktio	$\vee$
jos…niin	implikaatio	$\rightarrow$
jos ja vain jos	ekvivalenssi	$\leftrightarrow$

Huomaa, että logiikassa **tai** tarkoittaa jompaakumpaa tai molempia.

Loogisia lauseita voidaan kirjoittaa käyttäen matematiikan kieltä.

ESIMERKKI 4

Kirjoita matematiikan merkinnöin lause ”Aurinko paistaa ja ei sada vettä.”

Ratkaisu:

Merkitään aluksi lauseen propositioita kirjaimilla:

A: Aurinko paistaa.

B: Sataa vettä.

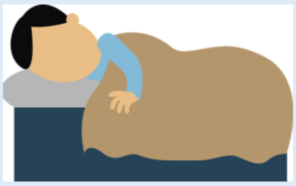
Lauseessa on proposition ”sataa vettä” negaatio ”ei sada vettä”, jolloin kirjoitetaan

$$\neg B.$$

Propositioiden välissä on sana ”ja”, jolloin ne yhdistetään konjuktiolla ja kirjoitetaan

$$A \wedge \neg B.$$

ESIMERKKI 5



Suomenna seuraavat matemaattisesti kirjoitetut lauseet:

a) $A \wedge C$
b) $\neg A \wedge \neg B$
c) $A \vee \neg B$
d) $A \wedge (B \vee C)$,

kun symbolit *A, B* ja *C* tarkoittavat seuraavaa:

A: On ilta.

B: Menen nukkumaan.

C: Syön iltapalaa.

Ratkaisu:

a) On ilta ja syön iltapalaa.
b) Ei ole ilta ja en mene nukkumaan.
c) On ilta tai en mene nukkumaan.
d) On ilta, ja menen nukkumaan tai syön iltapalaa.

Huomaa, että *d*-kohdassa voi syntyä sekaannusta, sillä luonnollisesta kielestä ei voi päätellä sulkujen paikkoja.

Opetus- ja kulttuuri- ministeriö
LUMA-KESKUS SUOMI

ESIMERKKI 6

Kirjoita seuraavat loogiset lauseet matemaattisesti konnektiivien avulla.

a) Asun Helsingissä ja pelaan jääkiekkoa.
b) Illalla syön jäätelöä tai karkkia.
c) On kesä ja en käy töissä.
d) On kesä, ja käyn töissä tai olen rannalla.

Ratkaisu:

a) A: Asun Helsingissä.
B: Pelaan jääkiekkoa.
$A \wedge B$
b) A: Illalla syön jäätelöä.
B: Illalla syön karkkia.
$A \vee B$
c) A: On kesä.
B: Käyn töissä.
$A \wedge \neg B$
d) A: On kesä.
B: Käyn töissä.
C: Olen rannalla.
$A \wedge (B \vee C)$

Huomaa, että *d*-kohdassa sulkujen paikalla on merkitystä. Lauseessa on pyritty painottamaan, että kesällä ollaan töissä tai rannalla. Jos merkittäisiin $(A \wedge B) \vee C$, tarkoittaisi lause ”On kesä ja käyn töissä, tai olen rannalla” sitä, että kesällä käydään töissä ja yleisesti käydään rannalla. Tämä ei ota kantaa siihen, onko rannalla käydessä kesä vai ei.

Esimerkkien 5 ja 6 *d*-kohdissa on käytetty sulkeita loogisten lauseiden muodostamiseen. Sulkeiden paikkaa on välillä vaikea hahmottaa luonnollisella kielellä kirjoitetuista lauseista, mutta matematiikan kielessä niillä on paljonkin merkitystä.

Mietitään esimerkiksi lausetta ”Osta kolmella eurolla suklaalevy tai karkkipussi ja tikkari”. Saako kolmella eurolla joko suklaalevyn, tai sitten karkkipussin sekä tikkarin? Vai saako itse asiassa tikkarin ja tämän lisäksi joko suklaalevyn tai karkkipussin?

Merkitään propositioita seuraavasti:

A: Kolmella eurolla saa suklaalevyn.
B: Kolmella eurolla saa karkkipussin.
C: Kolmella eurolla saa tikkarin.

Tällöin vaihtoehdot ovat:

eli $A \vee (B \wedge C)$

eli $(A \vee B) \wedge C$

Alkuperäinen lause on matemaattisesti kirjoitettuna $A \vee B \wedge C$. Lauseen merkitys riippuu kuitenkin sulkujen paikasta.

Negaation, disjunktion ja konjunktion lisäksi voidaan käyttää konnektiiveja nimeltä **implikaatio** ja **ekvivalenssi**. Implikaatio tarkoittaa seurausta eli asiasta A seuraa asia B. Tätä voidaan sanallisesti kuvailla sanaparilla **jos…niin**. Implikaatiota merkitään nuolella →.

ESIMERKKI 7

Muodosteta lause ”Jos olen myöhässä, niin saan jälki-istuntoa”.

Ratkaisu:

Merkitään aluksi lauseen propositioita kirjaimilla:

A: Olen myöhässä.

B: Saan jälki-istuntoa.

Lause voidaan merkitä matemaattisesti $A \to B$.

Ekvivalenssi puolestaan tarkoittaa asioiden yhtäsuuruutta. Se on sanallisessa mielessä ikään kuin **jos ja vain jos**. Ekvivalenssia merkitään nuolella ↔. Ekvivalenssi on sama asia kuin implikaatio kahteen eri suuntaan. Jos A:sta seuraa B ja B:stä seuraa A, ovat A ja B ekvivalentteja keskenään.

ESIMERKKI 8

Muodosta lause ”Liisa syö makkaraa, jos ja vain jos hänellä on kova nälkä”.

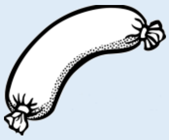
Ratkaisu:

Merkitään aluksi lauseen propositioita kirjaimilla:

A: Liisa syö makkaraa.

B: Liisalla on kova nälkä.

Lause voidaan merkitä matemaattisesti $A \leftrightarrow B$.



Totuustaulut

Loogisten lauseiden totuusarvoja voidaan tutkia **totuustaulujen** avulla. Totuustauluilla tutkitaan lauseiden totuusarvoja kaikilla alkuperäisten väitteiden totuusarvoilla. Totuustaulussa kussakin pystysarakkeessa on yhden lauseen totuusarvot, kun alkuperäiset lauseet saavat eri arvoja. Selvennetään totuustauluja muutamalla yksinkertaisella esimerkillä. Aloitetaan negaatiosta.

ESIMERKKI 9

A:n negaation totuusarvot totuustaulussa ovat seuraavat.

A	$\neg A$
1	0
0	1

Kun alkuperäinen väite on tosi, niin sen negaation on epätosi.

Kun alkuperäinen väite on epätosi, negaation on tosi.

Tarkastellaan seuraavaksi disjunktion ja konjunktion totuustauluja.

ESIMERKKI 10

Totuustaulu disjunktion (= tai) ja konjunktion (= ja) totuusarvoista A:n ja B:n eri totuusarvoilla.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Disjunktio on tosi, kun jompikumpi tai molemmat alkuperäisistä väitteistä ovat tosia.

Konjunktio on tosi vain, jos molemmat alkuperäisistä väitteistä ovat tosia.

Kun väitteiden määrä lisääntyy, ne voivat saada useampia erilaisia totuusarvoyhdistelmiä. Yksi väite esimerkissä 7 saattoi saada vain kaksi erilaista totuusarvoa, kun esimerkissä 8 erilaisia kahden väitteen totuusarvojen yhdistelmiä on neljä.

Tarkastellaan seuraavaksi implikaation ja ekvivalenssin totuustauluja.

ESIMERKKI 11

Totuustaulu implikaation ja ekvivalenssin totuusarvoista A:n ja B:n eri totuusarvoilla.

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Ekvivalenssin totuustaulu on melko selkeä. Ekvivalenssi on tosi vain, kun molempien alkuperäisten väitteiden totuusarvot ovat samat.

Implikaation totuustaulu saattaa ensinäkemällä näyttää omituiselta. Implikaatio on epätosi ainoastaan silloin, kun todesta seuraa epätosi.

ESIMERKKI 12

Tutki, milloin seuraava väite on tosi: ”Jos Kalle vihaa Juhoa, niin hän vihaa myös Henriä. Jos Kalle vihaa Henriä, hän vihaa myös Elinaa. Kalle ei vihaa Elinaa.”

Ratkaisu:

A: Kalle vihaa Juhoa.
B: Kalle vihaa Henriä.
C: Kalle vihaa Elinaa.

Tehtävän lauseet kuuluvat formalisoituna seuraavasti:

$A \rightarrow B.$	Jos Kalle vihaa Juhoa, niin hän vihaa Henriä.
$B \rightarrow C$	Jos Kalle vihaa Henriä, niin hän vihaa Elinaa.
$\neg C$	Kalle ei vihaa Elina

Muodostetaan totuustaulukko. Koska alkuperäisiä väitteitä on kolme, totuustaulukkoon tulee 8 riviä.

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$\neg C$	$(\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{A}) \wedge (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I}) \wedge \neg \mathbf{I}$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Tutkittu väite on tosi ainoastaan viimeisellä rivillä, joten Kalle ei vihaa ketään.