Totta vai tarua – matematiikan paradokseja

Onko intuitio aina oikeassa todennäköisyyksiä pohdittaessa? Tilastot eivät valehtele, eiväthän?

**Työohjeet:**

1. Muodostetaan noin 3 henkilön ryhmät.
2. Valitkaa yhden seuraavista aiheista:
* Monty Hallin ongelma
* Silmälukujen summa
* Toimiiko lääke?
* Sama syntymäpäivä
* Pääsevätkö pojat helpommin lukioon?
* Murphyn laki

HUOM! Ei samoja aiheita ryhmillä!

1. Pyrkikää ratkaisemaan ongelma ja perustelemaan ratkaisunne mahdollisimman monella eri tavalla.
2. Kootkaa ratkaisunne posteriksi.
3. Valmistelkaa esitys aiheestanne muulle luokalle. Teidän tulee selvittää ongelman ratkaisu muille niin, että kaikki luokkatoverinne sen ymmärtävät.

**Monty Hallin ongelma**

**Ongelma:** Kilpailijalla on edessään kolme samanlaista ovea. Yhden oven takana on palkintona auto ja kahden muun takana ei ole mitään. Kilpailija ei tiedä, minkä oven takana auto on.

Kilpailija saa valita ovista yhden, mutta hän ei saa avata sitä. Jäljelle jääneistä kahdesta ovesta avataan toinen ja sen takana ei ole mitään. Tämän jälkeen kilpailija saa valita, vaihtaako hän ensin valitsemansa oven toiseen jäljellä olevaan suljettuun oveen vai pitääkö ensin valitsemansa oven? Mitä kannattaa tehdä?

**Ratkaisuvinkki 1: Tutkikaa ongelmaa korttipakan avulla**

Yksi on pelaaja ja toinen pelinjohtaja. Muut pitävät kirjaa pelin tapahtumista. Poimikaa korttipakasta 1 hertta ja 2 pataa, joilla peliä pelataan. Pelin tavoitteena on löytää näistä kolmesta kortista hertta.

Pelaaja kääntyy selkä kortteihin päin ja pelinjohtaja asettaa kortit pöydälle kuva puoli alaspäin niin, että hän tietää, missä hertta on. Tämän jälkeen pelaaja valitsee yhden korteista, mutta ei katso korttia. Pelinjohtaja kääntää jäljelle jääneistä korteista toisen ympäri (tämän kortin tulee olla pata). Nyt pelaajan tulee päättää, haluaako hän pitää aiemman valintansa oikeasta kortista vai vaihtaa.

Tarkastelkaa, mitä tapahtuu, kun

1. pelaaja ei vaihda koskaan mieltä.
2. pelaaja vaihtaa joka kerta korttia.

Tutkikaa, kummassa tapauksessa pelaaja löytää hertan todennäköisemmin.

**Ratkaisuvinkki 2: Tutkikaa ongelmaa taulukoimalla**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Valittu ovi** | **Ovi 2** | **Ovi 3** | **Tulos vaihtamalla** | **Tulos pysymällä****alkuperäisessä** |
| Voitto | Ei voittoa | Ei voittoa |  |  |
| Ei voittoa | Voitto | Ei voittoa |  |  |
| Ei voittoa | Ei voittoa | Voitto |  |  |

Mikä on todennäköisyys voittaa auto, jos ovea vaihtaa ja mikä on todennäköisyys voittaa pysymällä alkuperäisessä valinnassa?

**Ratkaisuvinkki 3: Tutkikaa ongelmaa Internetin avulla**

Mitä jos ovia on enemmän kuin 3?

Googlatkaa Monty Hallin ongelma.

**Todennäköisin silmälukujen summa**

**Ongelma:** Heität kahta noppaa samaan aikaan. Mikä on todennäköisin silmälukujen summa?

**Ratkaisuvinkki 1: Tutki heittämällä noppia**

Heittäkää kahta noppaa lukuisia kertoja ja kirjatkaa ylös noppien silmälukujen summat. Laskekaa frekvenssi kullekin silmälukujen summalle. Mikä on todennäköisin silmäluku ja kuinka todennäköinen kyseinen silmäluku on?

**Ratkaisuvinkki 2: Tutki ristiintaulukoimalla:**

Laskekaa taulukkoon noppien silmälukujen summa kussakin tapauksessa.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** |  | **…** |
| **1** |  |  |  |  |  |
| **2** |  |  |  |  |  |
| **3** |  |  |  |  |  |
| **…** |  |  |  |  |  |

Tarkastelkaa taulukkoa. Mikä on todennäköisin silmäluku ja kuinka todennäköinen kyseinen summa on?

**Toimiiko lääke?**

Eräässä kokeessa tutkitaan taudin paranemista lääkkeen avulla. Kokeessa on mukana 80 alun perin sairasta koehenkilöä, joista 50 % on naisia ja loput miehiä. Tutkittavaa lääkettä annetaan 10 naiselle ja 30 miehelle. Loput koehenkilöt saavat lumelääkettä. Seuraaviin taulukoihin koottu tilanne sairauden suhteen kokeen jälkeen:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Molemmat sukupuolet** |  |  |
|  | **Parantuneita** | **Ei-parantuneita** | **Yhteensä** | **Parantumisaste** |
| **Lääke** | 20 | 20 | 40 | 50 % |
| **Kontrolli** | 16 | 24 | 40 | 40 % |
|  |  |  |  |  |
|  | **Miehet** |  |  |  |
|  | **Parantuneita** | **Ei-parantuneita** | **Yhteensä** | **Parantumisaste** |
| **Lääke** | 18 | 12 | 30 | 60 % |
| **Kontrolli** | 7 | 3 | 10 | 70 % |
|  |  |  |  |  |
|  | **Naiset** |  |  |  |
|  | **Parantuneita** | **Ei-parantuneita** | **Yhteensä** | **Parantumisaste** |
| **Lääke** | 2 | 8 | 10 | 20 % |
| **Kontrolli** | 9 | 21 | 30 | 30 % |

Tarkastele taulukoita. Mikä on erikoista? Mistä tämä erikoisuus johtuu?

Muodosta oma kuvitteellinen taulukko, josta löytyy samankaltainen ominaisuus.

**Sama syntymäpäivä?**

**Ongelma:** Kuinka monta henkilöä tulee olla tilaisuudessa koolla, jotta on yli 50 % todennäköisyys, että ainakin kahdella on sama syntymäpäivä?

**Vinkkejä:**

1. Esittäkää intuitioon perustuva arvio henkilömäärästä.
2. Laskekaa todennäköisyys (*P*), että kaikilla on eri syntymäpäivä taulukon tapauksissa.
3. Laskekaa todennäköisyys, että vähintään kahdella on sama syntymäpäivä taulukon tapauksissa. Tämä lasketaan $1-P$ (*P* desimaalilukuna) tai $100 \%-P$ (*P* prosenttilukuna).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Henkilöiden määrä** | ***P*** | **1-*P*** |
| **1** |  |  |
| **10** |  |  |
| **20** |  |  |
| **20** |  |  |
| **40** |  |  |
| **50** |  |  |
| **60** |  |  |
| **70** |  |  |
| **80** |  |  |
| **90** |  |  |
| **100** |  |  |

1. Päätelkää taulukon ja lisälaskujen avulla, mikä on kysytty todennäköisyys.
2. Piirtäkää Excelillä kuvaaja $1-P$:stä henkilöiden määrän funktiona.

**Pääsevätkö pojat helpommin lukioon?**

Korpivaarankaupungissa on kaksi lukiota: pieni Kärsäkorpi ja suuri Kukkavaara. Viime keväänä Känsäkorpeen haki 100 poikaa ja 10 tyttöä, kun taas Kukkavaaraan haki 100 tyttöä ja 10 poikaa. Sisään Känsäkorpeen valittiin 20 poikaa ja 1 tyttö, kun taas Kukkavaaraan valittiin 7 poikaa ja 60 tyttöä. Tarkastele erikseen seuraavia todennäköisyyksiä:

1. Känsäkorpeen hakenut poika pääsee sisään.
2. Kukkavaaraan hakenut poika pääsee sisään.
3. Korpivaaran kaupungin lukioon hakenut poika pääsee sisään.
4. Känsävaaraan hakenut tyttö pääsee sisään,
5. Kukkavaaraan hakenut tyttö pääsee sisään.
6. Korpivaaran kaupungin lukioon hakenut tyttö pääsee sisään.

Tarkastele, kummat pääsevät helpommin lukioon: tytöt vai pojat? Mistä tämä johtuu ja mikä on outoa? Mistä tämä outous johtuu?

Muodosta oma kuvitteellinen tilanne, josta löytyy samankaltainen ominaisuus.

**Murphyn laki**

Mikä on Murphyn laki? Onko sillä totuuspohjaa?

Tutkikaa omin koejärjestelyin seuraavan väitteen todenmukaisuutta: ”Voileipä putoaa todennäköisemmin lattialle voipuoli alaspäin.”